一定下落率を伴う双峰型関数上での二人タイミングゲーム (確率的環境下における数理モデルの理論と応用)

北條, 仁志

数理解析研究所講究録
第2044巻 2017年 13-23

一定下落率を伴う双峰型関数上での二人タイミングゲーム

大阪府立大学大学院 工学研究科 北條　仁志 (Hitoshi Hohjo)
Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University

1　はじめに

タイミングゲームは1950年代から精力的に研究された無限ゲームの一種であり、古典的成果は Karlin [3] や Dresher [1] にまとめられている。これらのモデルでは、プレイヤーの価値関数が連続であると仮定され、各プレイヤーがより大きな価値を獲得するような Nash 平衡戦略について議論された。1980年前後には Sakaguchi[5] や Teraoka[9] らによって盛んに研究され、それらのサーベイが Saito ら [4] によって与えられている。

プレイヤーの評価関数が連続であれば、Nash 平衡解は容易に導かれるが、不連続点をもつ関数に対してはそれぞれに与えられた問題を解くことで解決しなければならない。2000年代に入って寺岡・北條 [13] は時間につれて価値が増加し、後手プレイヤーは価値が一定率だけ割り引かれる二人タイミングゲームを提案し、サイレントバージョンとノイジーバージョンでのナッシュ平衡を導いた。このモデルでは、プレイヤーが同時に行動したときに得られる利得は折半すると仮定していた。寺岡・北條 [15] では [13] を N 人に拡張し、プレイヤーによって商品が売りに出される度に価値が一定率割り引かれるモデルを提案した。寺岡・北條 [16] と寺岡・北條 [17] では、それぞれ N 人ノイジーゲームとサイレントゲームについての結果を与えている。また、価値関数の一般化について考察するために、寺岡・北條 [18] は単峰型価値関数をもつ二人サイレントゲームを提案し、寺岡・北條 [19] ではノイジーゲームを扱った。単峰型価値関数は N 人サイレントゲームと3人ノイジーゲームが寺岡・北條 [20] および寺岡・林 [12] で展開されている。北條 [21] は価値関数の割引率が一定であるという仮定をより一般化したモデルを提案し、先手の決定に依存した割引率をもつ二人サイレントゲームについて言及した。寺岡 [11] はそのモデルを N 人に拡張している。特別なケースでの具体的な解は [7] や [8] を参照せよ。さらに Hohjo [2] では、後手プレイヤーの価値関数が有限個のシナリオによって確率的に与えられた二人サイレントゲームおよびノイジーゲームにおける Nash 平衡について言及された。いずれのモデルにおいてもサイレントゲームでは混合戦略による平衡解の導出に成功しているものの、ノイジーゲームでは $\epsilon-$ 平衡解の導出に留まっている。

本稿では、プレイヤーへの価値関数が双峰型である関数に対して、最初の極大点が最大点である場合および2つ目の極大点が最大点である場合の2つのモデルについてサイレントゲームおよびノイジーゲームにおける混合 Nash 平衡の存在性を示す。

2　タイミングゲーム

寡占状態にある二人のプレイヤー (プレイヤー 1,2) が小豆や大豆のような農作物を同一市場で販売することを考えている。これらのプレイヤーは次の期には新しい農作物が収穫されるため、1期間の中で適切な時刻 $t \in [0,1]$ に売りに出さなければならない。プレイヤーへの利得関数は区間 $[0,1]$ 上で定義された双峰型の価値関数 $v(t)$ で与えられており、一方のプレイヤーが農作物を売りに出すと価値が $rv(t)$ へと不連続に下落する。ここで、r は $0<r<1$ を満たす実数である。すなわち、農作物を市場に先に投入したプレイヤーの販売時刻が τ_1 であるならば、そのプレイヤーの利得は $v(\tau_1)$ となる。その後、後手のプレイヤーが農作物を $0 \le \tau_1 < \tau_2 \le 1$ を満たす時刻 τ_2

に販売したならば、そのプレイヤーへの利得は割引された価値 $rv(\tau_2)$ となる。関数 $v(t)$ は $[0,1]$ 上で連続で、$(0,1)$ 上で微分可能と仮定する。また、$\lim_{t\to+0} v'(t) > 0$、$\lim_{t\to 1-0} v'(t) < 0$ をみたすと仮定する。プレイヤーは価値関数 $v(t)$ や下落率 r に関して既知であると仮定する。関数 $v(t)$ は $0 < m_1 < m_2 < m_3 < 1$ を満たす時刻 m_1 と m_3 で極大点をとり、時刻 m_2 で極小点をとる。この問題において関数 $v(t)$ の最大値をとる時刻は２つの場合が存在する。時刻 m_1 で関数 $v(t)$ の値が最大となる場合をモデル (I)、時刻 m_3 で最大となる場合をモデル (II) と呼ぶことにする。これら２つのモデルに対して、各プレイヤーは価値と相手の売り出し時刻を考慮して、自分の価値が大きくなるタイミングを決定したい。

3　定式化

我々はこの問題を単位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上で定義された２人非０和ゲームとして定式化する。$M_i(x,y)$ をプレイヤー１が純戦略 $x\in[0,1]$ を、プレイヤー２が純戦略 $y\in[0,1]$ を用いたときのプレイヤー i の利得関数とする。また、プレイヤー１や２が混合戦略 (*cdfs*) $F(x)$, $G(y)$ を用いたときのプレイヤー i の期待利得を以下のように定義する：

$$M_\imath(x,G)=\int_0^1 M_i(x,y)dG(y);\quad M_i(F,y)=\int_0^1 M_i(x,y)dF(x)$$

$$M_\imath(F,G)=\int_0^1\int_0^1 M_\imath(x,y)dF(x)dG(y)$$

本モデルにおいて、$M_i(x,y)$ は $x=y$ で不連続な関数となる。

サイレントゲームの場合には、プレイヤーが任意の時刻に行動したとしても相手のプレイヤーにその情報は伝達しない。すなわち、両プレイヤーとも相手が既に売りに出したのか、まだ出してないのか分からず、自分が売りに出したときに初めて生産物の価値を知ることが出来る。従って、プレイヤー１が時刻 x に行動し、プレイヤー２が時刻 y に行動したときのプレイヤー１への利得 $M_1(x,y)$ およびプレイヤー２への利得 $M_2(x,y)$ は

$$M_1(x,y)=\begin{cases} v(x), & 0\le x<y \\ rv(x), & y\le x\le 1\end{cases};\qquad M_2(x,y)=\begin{cases} v(y), & 0\le y<x \\ rv(y), & x\le y\le 1\end{cases}$$

によって与えられる。

一方、ノイジーゲームの場合には、プレイヤーが行動すると相手プレイヤーにその情報が伝達し、行動したことが知られてしまう。価値関数の値が最大となる時刻にどちらのプレイヤーも行動していないのであれば、その時刻に行動すればよく、それまでに相手プレイヤーが行動したのであれば、割引された価値関数が最大となる時刻まで行動することを待てばよい。従って、Player 1 と Player 2 の純戦略をそれぞれ $x\in[0,1]$、$y\in[0,1]$ とすると、Player 1 への期待利得 $M_1(x,y)$ と Player 2 への期待利得 $M_2(x,y)$ は

$$M_1(x,y)=\begin{cases} v(x), & 0\le x<y \\ rv(m_\jmath), & y\le x\le 1\end{cases}\tag{1}$$

$$M_2(x,y)=\begin{cases} v(y), & 0\le y<x \\ rv(m_\jmath), & x\le y\le 1\end{cases}\tag{2}$$

によって与えられる。ここで、モデル (I) に対して $j=1$、モデル (II) に対して $j=3$ である。

4　解析

２つのモデルは極大点が異なることを除いてほとんど同じ数理モデルで定義できるが、価値関数の特徴から平衡解は異なる。

4.1　モデル (I)

4.1.1　サイレントゲーム

サイレントゲームにおいて $v(0) \leq rv(m_1)$ の場合を考える。各プレイヤーは純戦略 m_1 を選ぶと割引された価値の中で最大である $rv(m_1)$ を得ることができるが、残念なことにこの戦略は平衡戦略にはならない。しかしながら、プレイヤーがこの戦略を選択すると価値 $rv(m_1)$ を確保することができるため、これ以上の値をもつ戦略に限定して混合戦略のクラスにおける平衡戦略を探究する。

今、a を $0 \leq a < m_1$ を満たす任意の時刻とし、$F(t)$ を区間 (a, m_1) 上で確率密度関数 $f(t)$ をもち、$\int_a^{m_1} dF(t) = 1$ を満たす混合戦略とする。このとき、プレイヤー１が混合戦略 $F(x)$ を用いてプレイヤー２が純戦略 y を用いたときのプレイヤー２への期待利得 $M_2(F, y)$ は

$$M_2(F,y) = \begin{cases} v(y), & 0 \leq y \leq a \\ \int_a^y rv(y)dF(x) + \int_y^{m_1} v(y)dF(x), & a < y \leq 1 \end{cases}$$

となる。a および $F(x)$ を求めるために、恒等子法を適用する。$a < y \leq 1$ に対して

$$\int_a^y rv(y)dF(x) + \int_y^{m_1} v(y)dF(x) = k$$

とおき、y で微分して整理すると

$$\frac{v'(y)}{v(y)} = \frac{-\{rf(y) - f(y)\}}{r\int_a^y f(x)dx + \int_y^{m_1} f(x)dx} \tag{3}$$

を得る。(3) 式の両辺を y で積分することにより

$$\frac{C}{v(y)} = r\int_a^y f(x)dx + \int_y^{m_1} f(x)dx \tag{4}$$

を得る。そこで、C は積分定数である。$y = a$ における境界条件より

$$C = v(a) \tag{5}$$

を得る。(5) 式を (30) 式に代入すると

$$\frac{v(a)}{v(y)} = 1 - (1-r)\int_a^y f(x)dx \tag{6}$$

となる。密度関数 $f(y)$ を求めるために、(31) 式の両辺を y で微分して整理すると

$$f(y) = \frac{v(a)v'(y)}{(1-r)v(y)^2} \tag{7}$$

が得られる。(7) 式で表される密度関数 $f(y)$ に対応する分布関数 $F(y)$ は

$$F(y) = \int_a^y f(t)dt = \frac{1}{1-r}\left[1 - \frac{v(a)}{v(y)}\right], \quad a < y < m_1 \tag{8}$$

である。$F(y)$ の $y = a$ における境界条件 $F(a) = 0$ は常に成り立っている。$y = m_1$ における境界条件 $F(m_1) = 1$ より

$$F(m_1) = \frac{1}{1-r}\left[1 - \frac{v(a)}{v(m_1)}\right] = 1 \tag{9}$$

でなければならない。これは方程式

$$v(a) = rv(m_1) \tag{10}$$

を満たす実数 a が区間 $[0, m_1)$ 上に存在するときにのみ成り立つ。以上の議論により、以下の結果が得られる。

定理 1. $v(0) \leq rv(m_1)$ と仮定する。a を方程式 $v(a) = rv(m_1)$ の区間 $[0, m_1]$ における最小の解とし、次のような混合戦略を考える。

$$F(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a \\ \dfrac{1}{1-r}\left[1 - \dfrac{v(a)}{v(t)}\right], & a < t < m_1 \\ 1, & m_1 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{11}$$

このとき、混合戦略の組 (F, F) は1つのナッシュ平衡点を構成する。この戦略に対応する Player 1,2 の期待利得は

$$v_i = M_i(F, F) = v(a), \quad i = 1, 2 \tag{12}$$

となる。

証明 (11) 式の混合戦略を用いて区間 $a < y < m_1$ に対する $M_2(F, y)$ の値を計算すると

$$\begin{aligned} M_2(F,y) &= \int_a^y rv(y)dF(x) + \int_y^{m_1} v(y)dF(x) \\ &= \int_a^y rv(y)\frac{v(a)v'(x)}{(1-r)v(x)^2}dx + \int_y^{m_1} v(y)\frac{v(a)v'(x)}{(1-r)v(x)^2}dx \\ &= \frac{rv(y)v(a)}{1-r}\int_a^y \frac{v'(x)}{v(x)^2}dx + \frac{v(y)v(a)}{1-r}\int_y^{m_1}\frac{v'(x)}{v(x)^2}dx \\ &= \frac{rv(y)v(a)}{1-r}\left(\frac{1}{v(a)} - \frac{1}{v(y)}\right) + \frac{v(y)v(a)}{1-r}\left(\frac{1}{v(y)} - \frac{1}{v(m_1)}\right) \\ &= \frac{rv(y) - rv(a) + v(a)}{1-r} - \frac{rv(y)v(a)}{v(a)(1-r)} \\ &= \frac{rv(y) - rv(a) + v(a) - rv(y)}{1-r} \\ &= v(a) \end{aligned} \tag{13}$$

となる。区間 $m_1 \leq y \leq 1$ のときも同様にして

$$M_2(F,y) = \int_a^{m_1} rv(y)dF(x) = rv(y) < rv(m_1) = v(a) \tag{14}$$

を得る。また、区間 $0 \leq y \leq a$ においては関数 $v(y)$ の連続性と $v'(y) \geq 0$ $(0 < y \leq a)$ より $M_2(F,y) = v(y) \leq v(a)$ となる。従って、Player 1 が混合戦略 $F(x)$ をとったときの Player 2 への期待利得 $M_2(F,y)$ が

$$M_2(F,y) \begin{cases} \leq v(a), & 0 \leq y \leq a \\ = v(a), & a < y \leq m_1 \\ < v(a), & m_1 < y \leq 1 \end{cases} \tag{15}$$

となることが示せた。このとき、Player 2 も Player 1 と同一の混合戦略 $F(y)$ を用いると、$M_2(F,F) = v(a)$ が得られる。一方、Player 2 が混合戦略 $F(y)$ をとったときの Player 1 への期待利得 $M_1(x,F)$ も同様の計算により、

$$M_1(x,F) \begin{cases} \leq v(a), & 0 \leq x \leq a \\ = v(a), & a < x \leq m_1 \\ < v(a), & m_1 < x \leq 1 \end{cases} \tag{16}$$

となり、戦略対 (F,F) に対して $M_1(F,F) = v(a)$ が得られる。よって、戦略対 (F,F) がナッシュ平衡点であることが示せた。

4.1.2 ノイジーゲーム

次に、ノイジーゲームにおいて $v(0) \leq rv(m_1)$ の場合を考える。このとき、$v(a) = rv(m_1)$ となる最小の a が $[0, m_1)$ 内に存在する。Player 1 が純戦略 x を用い、Player 2 が純戦略 a を用いたときの Player 1 への期待利得 $M_1(x,a)$ を計算すると

$$M_1(x,a) = \begin{cases} v(x) < v(a) = rv(m_1), & 0 \leq x < a \\ rv(a) < rv(m_1), & x = a \\ rv(m_1), & a < x \leq m_1 \\ rv(x) < rv(m_1), & m_1 < x \leq 1 \end{cases} \tag{17}$$

となる。同様に、Player 1 が純戦略 a を用い、Player 2 が純戦略 y を用いたときの Player 2 への期待利得 $M_2(a,y)$ を計算すると

$$M_2(a,y) = \begin{cases} v(y) < v(a) = rv(m_1), & 0 \leq y < a \\ rv(a) < rv(m_1), & y = a \\ rv(m_1), & a < y \leq m_1 \\ rv(y) < rv(m_1), & m_1 < y \leq 1 \end{cases} \tag{18}$$

となり、(17)、(18) 式より戦略対 (a,a) はナッシュ平衡点ではない。これは純戦略の戦略対にナッシュ平衡点が存在しないことを示している。そこで、混合戦略について考える。プレイヤーは任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$v(a+\delta) - v(a) < \varepsilon$ を満たす $\delta > 0$ を選び、区間 $(a, a+\delta)$ 上の一様分布で構成される混合戦略 $G(t)$ を用いると仮定する。すなわち、

$$G(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ \displaystyle\int_a^t \left(\frac{1}{\delta}\right) ds, & a \leq t \leq a+\delta \\ 1, & a+\delta < t \leq 1 \end{cases} \tag{19}$$

である。Player 1 が混合戦略 $G(x)$ を用い、Player 2 が純戦略 y を用いたときの Player 2 への期待利得 $M_2(G,y)$ を計算すると

$$M_2(G,y) = \begin{cases} v(y), & 0 \le y < a \\ \int_a^y \left[\frac{rv(m_1)}{\delta}\right] dG(x) + \int_y^{a+\delta} \left[\frac{v(y)}{\delta}\right] dG(x), & a \le y \le a+\delta \\ rv(m_1), & a+\delta < y \le m_1 \\ rv(y), & m_1 < y \le 1 \end{cases} \tag{20}$$

となる。(20) 式の区間 $a \le y \le a+\delta$ に対する $M_2(G,y)$ は

$$\begin{aligned} M_2(G,y) &= \int_a^y \left[\frac{rv(m_1)}{\delta}\right] dG(x) + \int_y^{a+\delta} \left[\frac{v(y)}{\delta}\right] dG(x) \\ &= rv(m_1)\left[\frac{y-a}{\delta}\right] + v(y)\left[\frac{a+\delta-y}{\delta}\right] \\ &\le rv(m_1)\left[\frac{y-a}{\delta}\right] + v(a+\delta)\left[\frac{a+\delta-y}{\delta}\right] \\ &\le rv(m_1)\left[\frac{y-a}{\delta}\right] + [v(a)+\varepsilon]\left[\frac{a+\delta-y}{\delta}\right] \\ &\le rv(m_1) + \varepsilon\left[\frac{a+\delta-y}{\delta}\right] \\ &\le rv(m_1) + \varepsilon \end{aligned} \tag{21}$$

である。従って、

$$M_2(G,y) \le rv(m_1) + \varepsilon, \quad 0 \le y \le 1 \tag{22}$$

が得られる。一方、不等式

$$\begin{aligned} M_2(G,y) &\ge rv(m_1)\left[\frac{y-a}{\delta}\right] + v(a)\left[\frac{a+\delta-y}{\delta}\right] \\ &= rv(m_1), \quad a \le y \le a+\delta \end{aligned} \tag{23}$$

も得られる。(22) と (23) 式より以下のことが言える。

$$rv(m_1) \le M_2(G,y) \le rv(m_1) + \varepsilon, \quad a \le y \le a+\delta \tag{24}$$

$M_1(x,G)$ に対しても同様にして

$$rv(m_1) \le M_1(x,G) \le rv(m_1) + \varepsilon, \quad a \le x \le a+\delta \tag{25}$$

が得られる。以上の議論により、次の結果が導かれる。

定理 2. $v(0) \le rv(m_1)$ と仮定する。a を方程式 $v(a) = rv(m_1)$ の区間 $[0, m_1]$ における最小の解とし、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$v(a+\delta) - v(a) < \varepsilon$ を満たす $\delta > 0$ を選ぶ。そして、次のような混合戦略を考える。

$$G(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ \int_a^t \left(\frac{1}{\delta}\right) ds, & a \le t \le a+\delta \\ 1, & a+\delta < t \le 1 \end{cases} \tag{26}$$

このとき、混合戦略の組 (G,G) は 1 つの ε-ナッシュ平衡点を構成する。この戦略に対応する Player 1, 2 の期待利得は

$$rv(m_1) \le M_1(x,G) \le rv(m_1)+\varepsilon, \quad a \le x \le a+\delta \tag{27}$$

$$rv(m_1) \le M_2(G,y) \le rv(m_1)+\varepsilon, \quad a \le y \le a+\delta \tag{28}$$

を満たす。$\varepsilon \to 0$ とすると

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M_i(G,G) = rv(m_1) \ (i=1,2) \tag{29}$$

であり、これは極限的な意味でのナッシュ平衡点であることを表している。

証明は (20) 式以降 (25) 式までに示した通りである。

4.2 モデル (II)

4.2.1 サイレントゲーム

まず、$v(m_1) \ge rv(m_3) \ge v(0)$ の場合について考える。$0 \le a < m_1 < b < m_3$ であるとする。今、混合戦略

$$F_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le a \\ \int_a^t f_1(s)ds, & a < t < m_1 \\ \int_a^{m_1} f_1(s)ds, & m_1 \le t \le b \\ \int_a^{m_1} f_1(s)ds + \int_b^t f_2(s)ds, & b < t < m_3 \\ 1, & m_3 \le t \le 1 \end{cases}$$

に着目する。ここで、$\int_a^{m_1} f_1(s)ds + \int_b^{m_3} f_2(s)ds = 1$、$f_1(t) > 0$ for $a < t < m_1$、$f_2(t) > 0$ for $b < t < m_3$ を満たすとする。Player 1 が混合戦略 $F_2(t)$ を用いて、Player 2 が純戦略 $y \in [0,1]$ を用いるときの Player 2 への期待利得 $M_2(F_2,y)$ は

$$M_2(F_2,y) = \begin{cases} v(y), & 0 \le y \le a \\ v(y) - (1-r)v(y)\int_a^y f_1(s)ds, & a < y < m_1 \\ v(y) - (1-r)v(y)\int_a^{m_1} f_1(s)ds, & m_1 \le y \le b \\ (1-r)v(y)\int_y^{m_3} f_2(s)ds + rv(y), & b < y < m_3 \\ rv(y), & m_3 \le y \le 1 \end{cases}$$

となる。今、恒等子法を用いて解くために

$$M_2(F_2,y) = \text{const for } y \in (a,m_1) \cup (b,m_3)$$

とおき、両辺を y で微分すると

$$0 = \frac{dM_2(F_2,y)}{dy} = \begin{cases} v'(y) - (1-r)v'(y)\int_a^y f_1(s)ds - (1-r)v(y)f_1(y), & a < y < m_1 \\ (1-r)v'(y)\int_y^{m_3} f_2(s)ds - (1-r)v(y)f_2(y) + rv'(y), & b < y < m_3 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} \frac{v'(y)}{v(y)} = \frac{(1-r)f_1(y)}{1-(1-r)\int_a^y f_1(s)ds}, & a < y < m_1 \\ \frac{v'(y)}{v(y)} = \frac{(1-r)f_2(y)}{r+(1-r)\int_y^{m_3} f_2(s)ds}, & b < y < m_3 \end{cases}$$

を得る。各微分方程式の両辺を y で積分して整理すると

$$v(y)=\frac{C_1}{1-(1-r)\int_a^y f_1(s)ds},\ a<y<m_1 \tag{30}$$

$$v(y)=\frac{C_2}{r+(1-r)\int_y^{m_3} f_2(s)ds},\ b<y<m_3 \tag{31}$$

となる。そこで、C_1, C_2 は積分定数である。$y=a$ における境界条件より $C_1=v(a)$ を得る。また、$y=m_3$ における境界条件より $C_2=rv(m_3)$ を得る。$a<y<m_1$ において (30) 式を y で微分して

$$f_1(y)=\frac{v(a)v'(y)}{(1-r)v(y)^2}$$

を得る。この密度関数に対応する分布関数は

$$F_2(y)\ =\ \int_a^y f_1(s)ds\ =\ \frac{1}{1-r}\left(1-\frac{v(a)}{v(y)}\right),\ a<y<m_1 \tag{32}$$

である。これは境界条件 $F_2(a)=0$ を常に満たしている。

一方、$b<y<m_3$ において (31) 式を y で微分して

$$f_2(y)=\frac{rv(m_3)v'(y)}{(1-r)v(y)^2}$$

を得る。この密度関数に対する分布関数は

$$\begin{aligned} F_2(y) &= \int_a^{m_1} f_1(s)ds+\int_b^y f_2(s)ds \\ &= \frac{1}{1-r}\left(1-\frac{v(a)}{v(m_1)}\right)+\frac{rv(m_3)}{1-r}\left(\frac{1}{v(b)}-\frac{1}{v(y)}\right),\ b<y<m_3 \end{aligned} \tag{33}$$

である。これが分布関数を構成するためには、境界条件として $F_2(m_3)=1$ が成り立たなければならない。すなわち

$$\frac{v(a)}{v(m_1)}=\frac{rv(m_3)}{v(b)} \tag{34}$$

を満たす必要がある。

$a<t<m_1$ において

$$\begin{aligned} M_2(F_2,y) &= v(y)-(1-r)v(y)\frac{1}{1-r}\left(1-\frac{v(a)}{v(y)}\right) \\ &= v(a) \end{aligned}$$

である。$m_1\le t\le b$ においては

$$\begin{aligned} M_2(F_2,y) &= v(y)-(1-r)v(y)\frac{1}{1-r}\left(1-\frac{v(a)}{v(m_1)}\right) \\ &= \frac{v(a)}{v(m_1)}v(y) \end{aligned}$$

となる。また、$b<t<m_3$ において

$$F_2(y)\ =\ \frac{1}{1-r}\left(1-\frac{v(a)}{v(m_1)}\right)+\frac{rv(m_3)}{1-r}\left(\frac{1}{v(b)}-\frac{1}{v(y)}\right)$$

$$= \frac{1}{1-r}\left(1 - \frac{rv(m_3)}{v(y)}\right)$$

なので、

$$\begin{aligned} M_2(F,y) &= (1-r)v(y)(1-F_2(y)) + rv(y) \\ &= (1-r)v(y)\left\{1 - \frac{1}{1-r}\left(1 - \frac{rv(m_3)}{v(y)}\right)\right\} + rv(y) \\ &= rv(m_3) \end{aligned}$$

である。まとめると

$$M_2(F,y) = \begin{cases} v(y) \le v(a), & 0 \le y \le a \\ v(a), & a < y < m_1 \\ \frac{v(a)}{v(m_1)}v(y) \le \max\{v(a), rv(m_3)\}, & m_1 \le y \le b \\ rv(m_3), & b < y < m_3 \\ rv(y) \le rv(m_3), & m_3 \le y \le 1 \end{cases}$$

となる。Player 1 は Player 2 の期待利得 $M_2(F_2, y)$ を小さくするような戦略 F_2 を選ぶことにより、自身の利得を大きくすることができる。利得の構造が対称的であるので、$v(a) = rv(m_3)$ となるような a を定めるであろう。このことから $v(m_1) = v(b)$ も定まる。

定理 3. $v(m_1) \ge rv(m_3) \ge v(0)$ と仮定する。a を $0 \le a \le m_1$ を満たす方程式 $v(a) = rv(m_3)$ の根、b を $m_2 \le b \le m_3$ を満たす方程式 $v(m_1) = v(b)$ の根とし、次のような混合戦略を考える。

$$F_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le a \\ \frac{1}{1-r}\left(1 - \frac{v(a)}{v(y)}\right), & a < t < m_1 \\ \frac{1}{1-r}\left(1 - \frac{v(a)}{v(m_1)}\right), & m_1 \le t \le b \\ \frac{1}{1-r}\left(1 - \frac{rv(m_3)}{v(y)}\right), & b < t < m_3 \\ 1, & m_3 \le t \le 1 \end{cases}$$

このとき、混合戦略の組 (F_2, F_2) は 1 つのナッシュ平衡点を構成する。この戦略に対応する Player 1,2 の期待利得は

$$v_i = M_\imath(F_2, F_2) = rv(m_3), \quad i = 1, 2$$

となる。

証明 Player 1, 2 ともに混合戦略 F_2 を用いたときの Player 2 への期待利得 $M_2(F_2, F_2)$ は

$$\begin{aligned} M_2(F_2,F_2) &= \int_a^{m_1} M_2(F_2,y)f_1(y)dy + \int_b^{m_3} M_2(F_2,y)f_2(y)dy \\ &= v(a)F_2(m_1) + rv(m_3)(1-F_2(b)) \\ &= rv(m_3) \end{aligned}$$

Player 1 の期待利得も同様に得られる。よって、戦略対 (F_2, F_2) はナッシュ平衡点であることが示せた。

さらに、$v(m_1) < rv(m_3)$ の場合について言及する。この場合にはモデル (I) のサイレントゲームと同一の結果を得ることができる。

定理 4. $v(m_1) < rv(m_3)$ と仮定する。b を $m_2 \leq b \leq m_3$ を満たす方程式 $rv(m_3) = v(b)$ の根とし、次のような混合戦略を考える。

$$F_3(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq b \\ \frac{1}{1-r}\left(1 - \frac{rv(m_3)}{v(t)}\right), & b < t < m_3 \\ 1, & m_3 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

このとき、混合戦略の組 (F_3, F_3) は1つのナッシュ平衡点を構成する。この戦略に対応する Player 1, 2 の期待利得は

$$v_i = M_i(F_3, F_3) = rv(m_3), \quad i = 1, 2$$

となる。

5 最後に

本稿では双峰型価値関数をもつ2人タイミングゲームでのサイレントゲームとノイジーゲームを扱った。ある条件の下で混合戦略のクラスにおいてナッシュ平衡解の存在性を示した。下落後の価値関数の最大値と同じ値をもつ時刻が事前に存在するならば、ここで得られた結果はより一般化することができるであろう。また、別の条件下での平衡の存在性についても興味がある。これらは今後の課題とする。

参考文献

[1] Dresher,M., Games of Strategy: Theory and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1954.

[2] Hohjo,H., A Timing Game with Uncertain Value Function to the Follower, Proceedings of the 8th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Hirosaki, Japan, 119-130 (2013).

[3] Karlin,S., Mathematical Method and Theory in Games, Programming, and Economics, Vol.2, Addison-Wesley, Massachusetts, 1959.

[4] Saito,Y., T.Dohi, Stochastic Marksmanship Contest Games with Random Termination - Survey and Applications, Journal of the Operations Research Society of Japan, 58(3), 223-246 (2015).

[5] Sakaguchi,M., Marksmanship contests-nonzero sum game of timing, Mathematica Japonica, 22, 585-596 (1978).

[6] Teraoka,Y., H.Hohjo, Two person games of timing on sale, Proceedings of International Workshop on Recent Advances in Stochastic Operations Research, Canmore, 281-288 (2005 Aug).

[7] Teraoka,Y., H.Hohjo, Two person games on sale in which the price fluctuates with time, Scientiae Mathematicae Japonicae, 69 (1), 101-109 (2009).

[8] Teraoka,Y., N person silent games on sale in which the price is a unimodal function with time, Scientiae Mathematicae Japonicae, 70, 461-466 (2009).

[9] Teraoka,Y., A two-person game of timing with random termination, Journal of Optimization Theory and Applicaitons, 40(3), 379-396 (1983).

[10] 寺岡, 無限ゲームをめぐって, 数理解析研究所講究録 1559,163-176(2007).

[11] 寺岡, 割引率が経過時間に依存する売り出しの n 人タイミングゲーム, 数理解析研究所講究録 1734, 244-250 (2011).

[12] 寺岡, 林, 3人売り出しのタイミング・ゲーム, 数理解析研究所講究録 1589, 130-136 (2008).

[13] 寺岡, 北條, 売り出しのタイミングゲーム, 数理解析研究所講究録 1373, 59-64 (2004).

[14] 寺岡, 北條, 売り出しのタイミング・ゲームと Nash 平衡, 数理解析研究所講究録 1383, 1-8 (2004).

[15] 寺岡, 北條, N 人売り出しのタイミング・ゲーム, 数理解析研究所講究録 1457, 163-170 (2004).

[16] 寺岡, 北條, N 人売り出しのノイジー・ゲーム, 数理解析研究所講究録 1477, 174-177 (2006).

[17] 寺岡, 北條, N-Person Game of Timing on Sale - Silent Case, 数理解析研究所講究録 1504, 105-109 (2006).

[18] 寺岡, 北條, 価値が変動する2人売り出しのサイレント・ゲーム, 数理解析研究所講究録 1526, 96-101 (2006).

[19] 寺岡, 北條, 価値が変動する2人売り出しのノイジー・ゲーム, 数理解析研究所講究録 1548, 138-145 (2007).

[20] 寺岡, 北條, N 人売り出しのサイレント・ゲーム, 数理解析研究所講究録 1559, 50-55 (2007).

[21] 北條, 時刻に依存した割引率をもつ2人売り出しサイレント・ゲーム, 国際数理科学協会 2009 年度年会「確率モデルと最適化」部会, 神戸大学, Aug 12 (2009).